Διαστήματα Εμπιστοσύνης

$X_1,\dots,X_n \to f_X \to f(\cdot,\theta),\ \theta\in\Theta\subseteq\mathbb{R}$

σταθ. άγν.

1ο τ.δ.: $X_1,\dots,X_n \to \bar{x} \xrightarrow{\text{εκτιμ}} \theta$

2ο τ.δ.: $Y_1,\dots,Y_n \to \bar{y} \xrightarrow{\text{εκτιμ}} \theta$

ΟΡΙΣΜΟΣ Έστω τ.δ. $\underline{X}=(X_1,\dots,X_n)$ από πληθυσμό με κατανομή $f(x,\theta)$, $\theta\in\Theta\subseteq\mathbb{R}$. Αν $L=L(\underline{x})$ και $U=U(\underline{x})$ είναι δύο στατιστικές συναρτήσεις, τότε το τυχαίο διάστημα $(L(\underline{x}),U(\underline{x}))$ λέγεται <u>διάστημα εμπιστοσύνης (δ.ε)</u> για την $g(\theta)$ με <u>βαθμό εμπιστοσύνης (β.ε)</u> $100(1-a)\%$, $0<a<1$, αν

$$P(L(\underline{x})<g(\theta)<U(\underline{x}))=1-a,\ \forall\theta\in\Theta$$

Παρατηρήσεις:

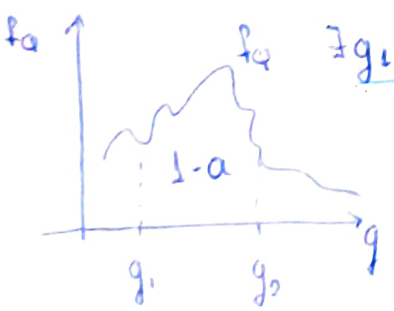
(1) Αν $\underline{x}=(x_1,\dots,x_n)$ η παρατηρηθείσα τιμή του τ.δ. $\underline{X}$, το δ.ε είναι $(L(\underline{x}),U(\underline{x}))$

(2) Κριτήριο ποιότητας δ.ε → ελάχιστο μήκος.

Μέθοδος της Αντιστρέψιμης Ποσότητας

(1) <u>Αντιστρέψιμη Ποσότητα</u>: Μια συνάρτηση $Q=Q(\underline{X},\theta)$ του τ.δ. $\underline{X}$ και της παραμέτρου θ που <u>η κατανομή της δεν εξαρτάται από την θ.</u>

(2) Επειδή η Q είναι αντιστρέψιμη με σ.π.π. f_Q που δεν εξαρτάται από το θ,



$\exists\ g_1,g_2$ <u>ανεξάρτητα της θ</u>, με $g_1<g_2$ τέτοια ώστε

$$P(g_1<Q(\underline{x},\theta)<g_2)=1-a$$

(3) Λύνω την ανισότητα ως προς $g(\theta)$ (ή θ) και έχω $P(L(\underline{x})<\theta<U(\underline{x}))=1-a$

Άρα $(L(\underline{x}),U(\underline{x}))$ είναι το δ.ε. με β.ε $1-a$

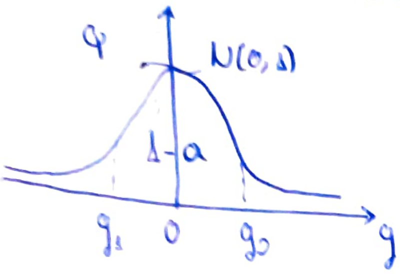
Δ.ε για τις παραμέτρους μ, σ^2 της $N(\mu, \sigma^2)$

Έστω τ.δ. $X_1, \dots, X_n$ από $N(\mu, \sigma^2)$

(I) δ.ε για την μ όταν σ^2 γνωστό

(1) Αναστρέψιμη ποσότητα: $Q = \dfrac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0,1)$, που η $N(0,1)$ ανεξάρτητη της μ.

(2) Αφού η Q αναστρέψιμη $\exists\, g_1, g_2$ $(g_1 < g_2)$ τέτοια ώστε:



$$P(g_1 < Q < g_2) = 1-\alpha$$

ή

$$P\left(g_1 < \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} < g_2\right) = 1-\alpha.$$

(3) Λύση ανισότητας

$$1-\alpha = P\left(g_1 < \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} < g_2\right) \xlongequal[\text{ως προς } \mu]{\text{λύση}} P\left(\bar{X} - g_2 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} - g_1 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Άρα το $\left(\bar{X} - g_2 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} - g_1 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ είναι ένα δ.ε για την μ με β.ε $1-\alpha$.

Εύρεση του δ.ε ελαχίστου μήκους

Δηλαδή εύρεση των g_1, g_2 που ελαχιστοποιούν το μήκος $l = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}(g_2 - g_1)$, όπου τα g_1 και g_2 ικανοποιούν την σχέση $1-\alpha = P(g_1 < Q < g_2)$

$$\frac{d}{dg_1} l = 0 \Rightarrow \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\left(\frac{d}{dg_1}(g_2) - \frac{d}{dg_1}(g_1)\right) = 0 \Rightarrow \frac{dg_2}{dg_1}\frac{d}{dg_2}(g_2) - 1 = 0 \Rightarrow 1 - \frac{dg_2}{dg_1} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dg_2}{dg_1} = 1.} \quad (1)$$

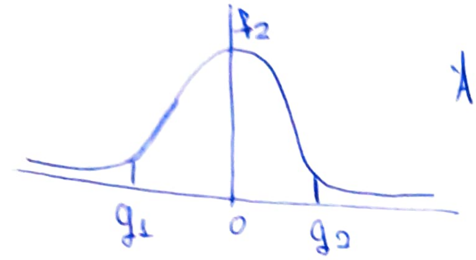
$$1-\alpha = P(g_1 < Q < g_2) = F_Q(g_2) - F_Q(g_1), \quad Q \sim N(0,1)$$
$$= \Phi(g_2) - \Phi(g_1)$$

$$\frac{d}{dg_1}(1-\alpha) = \frac{d}{dg_1}\Phi(g_2) - \frac{d}{dg_1}\Phi(g_1) \Rightarrow \frac{d}{dg_2}\Phi(g_2)\frac{dg_2}{dg_1} - f_Z(g_1) = 0, \quad Z \sim N(0,1)$$

$\Rightarrow f_Z(g_2)\frac{dg_2}{dg_1} - f_Z(g_1) = 0$

$\Rightarrow \boxed{\frac{dg_2}{dg_1} = \frac{f_Z(g_1)}{f_Z(g_2)}, \quad Z\sim N(0,1)}$ (2)

Από τις (1), (2): $f_Z(g_1) = f_Z(g_2)$, $Z\sim N(0,1)$



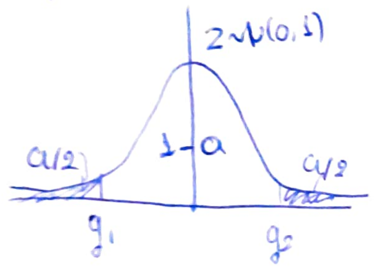
Άρα, τα g_1, g_2 είναι συμμετρικά.

$\Downarrow$

$\boxed{g_1 = -g_2}$

[Αλλιώς: $f_Z(g_1) = f_Z(g_2) \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{g_1^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{g_2^2}{2}} \Rightarrow \dots \Rightarrow g_1 = -g_2$]

Εύρεση g_2: επειδή τα g_1, g_2 συμμετρικά ισχύει: $P(Z\geq g_2) = \frac{a}{2}$ (*)



Θυμάμαι: z_a: ορίζεται $P(Z\geq z_a) = a$

Άρα $g_2 = z_{a/2}$.

Άρα $g_1 = -z_{a/2}$.

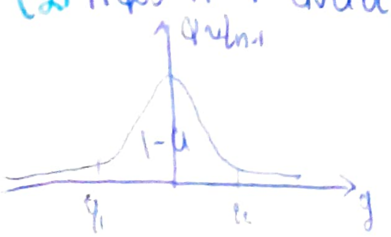
Άρα το $100(1-a)\%$ δ.ε. για την μ ελαχίστου μήκους είναι:

$$\boxed{\left(\bar{x} - z_{a/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{x} + z_{a/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \text{ ή } \bar{x} \pm z_{a/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

(II) δ.ε. για την μ όταν σ^2 άγνωστο

(1) Αναστρέψιμη Ποσότητα: $Q = \frac{\bar{x}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$, που η t_{n-1} ανεξάρτητη της μ.

(2) Αφού η Q αναστρέψιμη $\exists\ g_1, g_2\ (g_1 < g_2)$ τέτοια ώστε:



$P(g_1 < Q < g_2) = 1-a$ ή $P\left(g_1 < \frac{\bar{x}-\mu}{S/\sqrt{n}} < g_2\right) = 1-a$

(3) Λύση ανισότητας

$$1-a = P\left(g_1 < \frac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}} < g_2\right) \xrightarrow[\text{ως προς } \mu]{\text{λύνουμε}} P\left(\bar{x} - g_2\frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} - g_1\frac{s}{\sqrt{n}}\right)$$

Άρα το $\left(\bar{x} - g_2\frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} - g_1\frac{s}{\sqrt{n}}\right)$ είναι ένα δ.ε για την μ με σ.ε $1-a$

Εύρεση g_1, g_2 που ελαχιστοποιούν το $\ell = \frac{s}{\sqrt{n}}(g_2 - g_1)$ υπό την συνθήκη.

$1-a = P(g_1 < Q < g_2)$

Όπως και προηγούμενα $\frac{d\ell}{dg_1} = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{dg_2}{dg_1} = 1}$ (1)

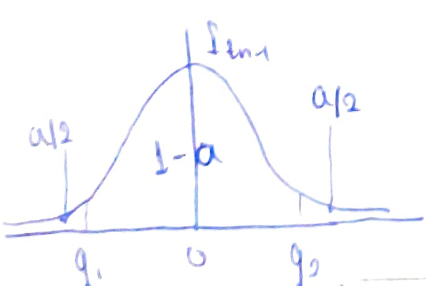
$$1-a = P(g_1 < Q < g_2) \Rightarrow 1-a = F_Q(g_2) - F_Q(g_1)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dg_1}(1-a) = \frac{d}{dg_1}\left(F_Q(g_2) - F_Q(g_1)\right)$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{dg_2}{dg_1}\frac{d}{dg_2}F_Q(g_2) - \frac{d}{dg_1}F_Q(g_1)$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{dg_2}{dg_1}\overbrace{f_{t_{n-1}}}^{\to \text{πυκνότητα}}(g_2) - f_{t_{n-1}}(g_1) \Rightarrow \boxed{\frac{dg_2}{dg_1} = \frac{f_{t_{n-1}}(g_1)}{f_{t_{n-1}}(g_2)}} \quad (2)$$

Από (1),(2): $f_{t_{n-1}}(g_1) = f_{t_{n-1}}(g_2) \Rightarrow g_1 = -g_2$



Άρα $P(t_{n-1} > g_2) = \frac{a}{2}$

από τον ορισμό $t_{n-1,a}$: $P(t_{n-1} > t_{n-1,a}) = a$

$\boxed{\text{Άρα } g_2 = t_{n-1,a/2} \text{ και } g_1 = -t_{n-1,a/2}}$

Άρα $100(1-a)\%$ δ.ε για μ όταν σ^2 άγνωστο: $\boxed{\left(\bar{x} - t_{n-1,\frac{a}{2}}\frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + t_{n-1,\frac{a}{2}}\frac{s}{\sqrt{n}}\right)}$

$\boxed{\text{ή } \bar{x} \pm t_{n-1,\frac{a}{2}}\frac{s}{\sqrt{n}}}$

(III) Δ.Ε για την σ^2 όταν μ γνωστό

(1) Αναφερετική ποσότητα $Q = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_n$

$X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

$\Downarrow$

$\dfrac{X_i-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

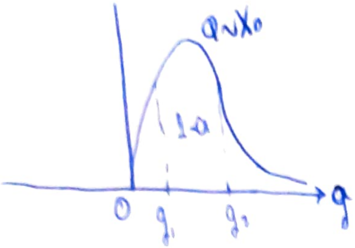
$\Downarrow$

$\dfrac{(X_i-\mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_1$

$\Downarrow$

$\sum_{i=1}^{n}\dfrac{(X_i-\mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{\sum_{i=1}^{n} 1} = \chi^2_n$

(2) Αφού Q αναφερετική $\exists\ g_1, g_2\ (g_1 < g_2)$:



$$1-\alpha = P(g_1 < Q < g_2) = P\left(g_1 < \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{\sigma^2} < g_2\right)$$

(3) Λύση διπλής ανισότητας ως προς σ^2

$$1-\alpha = P\left(g_1 < \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{\sigma^2} < g_2\right) = P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{g_2} < \sigma^2 < \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{g_1}\right)$$

Άρα το Δ.Ε είναι $\left(\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{g_2}, \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{g_1}\right)$

Εύρεση ελαχίστου μήκους: $l = \left(\dfrac{1}{g_1} - \dfrac{1}{g_2}\right)\sum(x_i-\mu)^2$

Αρκεί να ελαχιστοποιήσω το $l^* = \left(\dfrac{1}{g_1} - \dfrac{1}{g_2}\right)$ λαμβάνοντας υπόψιν:

$1-\alpha = P(g_1 < Q < g_2) = F_Q(g_2) - F_Q(g_1)$ παραγωγίζοντας ως προς g_1:

$$\boxed{\frac{dl^*}{dg_1} = -\frac{1}{g_1^2} + \frac{1}{g_2^2}\frac{dg_2}{dg_1}} \quad (1)$$

$$\frac{dg_2}{dg_1}\frac{dF_{\chi^2_n}(g_2)}{dg_2} - f_{\chi^2_n}(g_1) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dg_2}{dg_1} = \frac{f_{\chi^2_n}(g_1)}{f_{\chi^2_n}(g_2)}} \quad (3)$$

Από (1) $\dfrac{dl^*}{dg_1} = 0 \Rightarrow \boxed{\dfrac{1}{g_2^2}\dfrac{dg_2}{dg_1} = \dfrac{1}{g_1^2}}$ (2)

όπου $\boxed{f_{\chi^2_n}(g) = \dfrac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})2^{n/2}} g^{\frac{n}{2}-1} e^{-g/2},\ g>0}$ (4)

Από (2) και (3) προκύπτει $g_1^2 f_{\chi^2_n}(g_1) = g_2^2 f_{\chi^2_n}(g_2)$ και από την (4):

$$\boxed{g_1^{\frac{n}{2}+1} e^{-g_1/2} = g_2^{\frac{n}{2}+1} e^{-g_2/2}} \quad (5)$$

Η $1-a = P(g_1 < Q < g_2) \Leftrightarrow \boxed{\int_{g_1}^{g_2} f_{X^2_n}(q)\,dq = 1-a}$ (6)

Τα g_1, g_2 που ελαχιστοποιούν την ℓ^* άρα και το μήκος ℓ προκύπτουν από την επίλυση του συστήματος των (5), (6)

↓

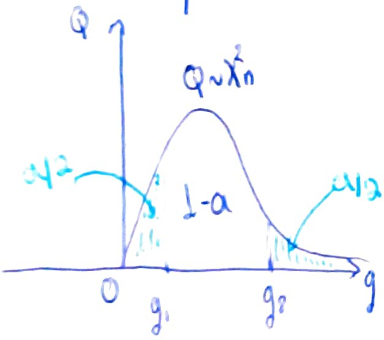
Δεν λύνεται σε αναλυτική μορφή

↓

Μόνο αριθμητική λύση για τα "καλύτερα" g_1, g_2 μπορεί να προκύψει.

Αν δεν μπορούν να βρεθούν δ.ε ελαχίστου μήκους → καταφεύγαμε σε δ.ε ίσων ουρών

Το δ.ε ίσων ουρών προκύπτει για επιλογή των g_1 και g_2 τέτοια ώστε να "κόβουν" ίσες ουρές από την κατανομή της Q



Αναζητώ g_1, g_2 τέτοια ώστε $P(Q \geq g_2) = \frac{a}{2} = P(Q \leq g_1)$

Θυμάμαι: $X^2_{n,a} : P(X^2_n \geq X^2_{n,a}) = a$

$$\boxed{g_2 = X^2_{n,a/2}}$$

$$\frac{a}{2} = P(Q \leq g_1) = P(X^2_n \leq g_1) = 1 - P(X^2_n \geq g_1) \Rightarrow P(X^2_n \geq g_1) = 1 - \frac{a}{2} \Rightarrow \boxed{g_1 = X^2_{n,1-\frac{a}{2}}}$$

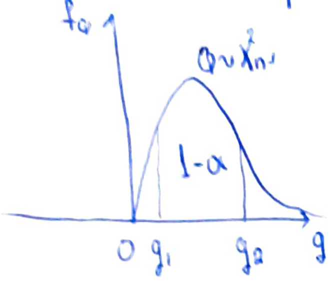
Άρα, το δ.ε ίσων ουρών για σ^2 είναι: $\boxed{\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i-\mu)^2}{X^2_{n,\frac{a}{2}}} , \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i-\mu)^2}{X^2_{n,1-\frac{a}{2}}} \right)}$

- εκτιμητής της σ^2
- επαρκής.

(IV) Δ.Ε για την σ^2 όταν μ άγνωστο

(1) Αναστρεπτή ποσότητα: $Q = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$

(2) Αφού Q αναστρεπτή: $\exists\, g_1, g_2 \ (g_1 < g_2)$ τέτοια ώστε $P(g_1 < Q < g_2) = 1-\alpha$.



(3) Λύση της ανισότητας ως προς σ^2

$$1-\alpha = P\left(g_1 < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < g_2\right) = P\left(\frac{(n-1)S^2}{g_2} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{g_1}\right)$$

Άρα ένα Δ.Ε για την σ^2 με σ.ε $100(1-\alpha)\%$ είναι: $\left(\frac{(n-1)S^2}{g_2}, \frac{(n-1)S^2}{g_1}\right)$

Δεν μπορεί να βρεθεί αναλυτικά Δ.Ε ελαχίστου μήκους

$\downarrow$ καταφεύγουμε

σε Δ.Ε ίσων ουρών

δηλαδή, επιλέγουμε τα g_1, g_2 ώστε: $P(Q > g_2) = \frac{\alpha}{2} = P(Q < g_1)$, $Q \sim \chi^2_{n-1}$

Άρα: $\boxed{g_2 = \chi^2_{n-1,\alpha/2}, \quad g_1 = \chi^2_{n-1,1-\alpha/2}}$

Άρα ένα Δ.Ε ίσων ουρών για την σ^2 με σ.ε $100(1-\alpha)\%$ είναι:

$$\boxed{\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1,\alpha/2}}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1,1-\alpha/2}}\right)}$$

- Αμερόληπτος της σ^2
- Σχετίζεται με τον ΕΜΠ
- Είναι ΑΟΕΔ?

Παρατήρηση Δ.Ε για την τυπική απόκλιση σ όταν μ άγνωστο

Από το Δ.Ε για την σ^2 έχουμε:

$$1-a = P\left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{n-1,a/2}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{n-1,1-a/2}}\right)$$

$$\Rightarrow 1-a = P\left(\sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{n-1,a/2}}} < \sigma < \sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{n-1,1-a/2}}}\right)$$

Άρα το Δ.Ε για την τυπική απόκλιση σ είναι: $\left(\sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{n-1,a/2}}}, \sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{n-1,1-a/2}}}\right)$